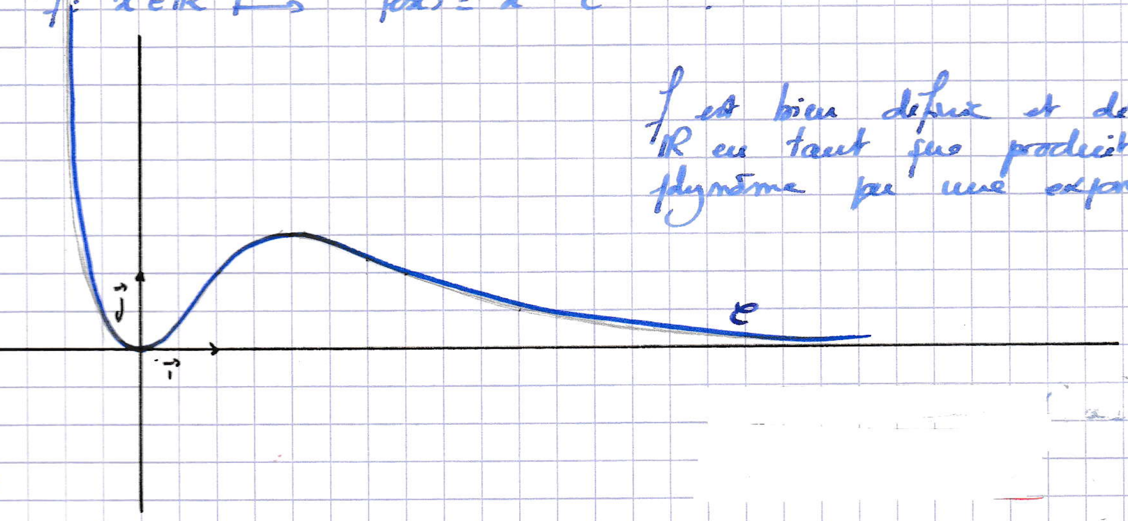
D N° EX 14.13

1°) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = x^2 e^{1-x}$.

Tracé de courbe à la calculatrice pour se faire une idée de la situation.



f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit d'un polynôme par une exponentielle.

1.a) · limite en $-\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (1-x) = +\infty$

Par composition, $\lim_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

Par produit, $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{1-x} = +\infty$

· limite en $+\infty$

$x^2 e^{1-x} = x^2 \times e \times e^{-x} = x^2 \times e \times \frac{1}{e^x} = e \times \frac{x^2}{e^x}$.

→ Je conseille d'admettre ici que $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0^+$, mais on va le démontrer. Tout d'abord, notons que par passage à l'inverse, il est équivalent de démontrer que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$.

On s'inspire de la démonstration de la Pté 10.5 :

$\frac{e^x}{x^2} = \frac{\left(e^{\frac{x}{3}}\right)^3}{x^2}$; Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x+1 \geq x$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{\frac{x}{3}} \geq \frac{x}{3}$.

Donc $\left(e^{\frac{x}{3}}\right)^3 \geq \left(\frac{x}{3}\right)^3$ si $\left(e^{\frac{x}{3}}\right)^3 \geq \frac{x^3}{27}$

Par suite $\frac{e^x}{x^2} \geq \frac{x^3}{27x^2}$ si $\frac{e^x}{x^2} \geq \frac{x}{27}$

Or $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{27} = +\infty$, donc par minoration $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ cqfd

+ simple : $\lim_{+\infty} \frac{x}{e^x} = 0^+$

$\lim \frac{x/2}{e^{x/2}} = 0^+$) $\times 2$

$\lim \frac{x}{e^{x/2}} = 0^+$) comp° fonct.

$\lim \frac{x^2}{e^x} = 0^+$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0^+$,

Il donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{1-x} = 0^+$

La droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

1.b) On a vu en introduction que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = 2x \times e^{1-x} + x^2 \times (-1)e^{1-x}$

$f'(x) = (2x-x^2)e^{1-x}$

$f'(x) = x e^{1-x}(2-x)$ or $e^{1-x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $x(2-x)$.

1.c)

x		0		2	
x	$-$	0	$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow 0^+$

(Voir courbe en début de corrigé : notre résultat est cohérent)

$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(2) = 4e^{-1} = \frac{4}{e} \end{cases}$

2°) $n\in\mathbb{N}$; $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$

Ce n'est pas demandé, mais on va démontrer que

$\forall n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$

$\boxed{\text{On utilise une intégration par parties : } \int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx}$

Soit $n\in\mathbb{N}$:

$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx = \int_0^1 x \times x^{n-1} e^{1-x}\,dx$

+ simple : $\begin{cases} u = x^{n+1} \\ v' = e^{1-x} \end{cases}$

on pose $v' = x$; $v = \frac{1}{2}x^2$

$u = x^{n-1}e^{1-x}$; $u' = (n-1)x^{n-2}e^{1-x} + x^{n-1}\times(-1)\times e^{1-x}$

$= \left((n-1)x^{n-2} - x^{n-1}\right)e^{1-x}$

$$I_n = \left[\frac{1}{2}x^2 \times x^{n-1} e^{1-x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \times \left((n-1)x^{n-2} - x^{n-1}\right)e^{1-x}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \times 1 \times \underbrace{e^{1-1}}_{1} - 0\right] - \frac{1}{2}\int_0^1 \left((n-1)x^{n} - x^{n+1}\right)e^{1-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 (n-1)\,x^n e^{1-x}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 x^{n+1} e^{1-x}\,dx$$

$$I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(n-1)\, I_n + \frac{1}{2}\, I_{n+1}$$

$$2I_n = 1 - (n-1)\, I_n + I_{n+1}$$

$$I_{n+1} = 2I_n - 1 + (n-1)\, I_n$$

$$I_{n+1} = (n-1+2)\, I_n - 1$$

$$I_{n+1} = (n+1)\, I_n - 1.$$ Cqfd.

2°a) $I_0 = \int_0^1 e^{1-x}\,dx = \left[-e^{1-x}\right]_0^1 = -e^0 + e^1 = \boxed{-1+e}$

$I_1 = 1 \times I_0 - 1 = I_0 - 1 = \boxed{e-2}$

$I_2 = 2 \times I_1 - 1 = 2(e-2) - 1 = 2e - 4 - 1 = \boxed{2e-5}$

2°b) I_2 est l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

3°a) $0 \le x \le 1$

$\iff -1 \le -x \le 0$

$\iff 0 \le 1-x \le 1$

$\iff e^0 \le e^{1-x} \le e^1$ car l'exponentielle est strictement croissante.

$\iff 1 \le e^{1-x} \le e$

$\iff x^n \le x^n e^{1-x} \le x^n e$

3°b) On intègre l'inégalité ci-dessus membre à membre :

$$\int_0^1 x^n\,dx \le \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx \le \int_0^1 x^n \times e\,dx$$

Or $\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0 = \frac{1}{n+1}$

$$\int_0^1 x^n \times e \, dx = e \int_0^1 x^n dx = e \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{e}{n+1}$$

D'où $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0^+$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0^+$

Donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0^+.}$$